Всеукраїнська конференція-школа «Сучасні проблеми геологічних наук»
Київ, 15-19 квітня 2013 р.

ОБЧИСЛЕННЯ АНАЛІТИЧНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ПОЛЯ СИЛИ ТЯЖІННЯ У ЗАДАЧІ АЛЕКСІДЗЕ

УДК 550.831+838

Дубовенко Ю.І., канд. фіз.-мат. наук,
Інститут геофізики НАН України

Змістовні математичні постановки конкретних геофізичних задач загалом зводяться до визначення коефіцієнтів відповідних рівнянь математичної фізики. Ця ідея використана, щоб дедуктивно звести нелінійне інтегральне рівняння у постановці задачі Алексідзе до лінійної комбінації шуканих розв'язків. У такій альтернативній постановці задача зведена до класичної задачі варіаційного обчислення.

Содержательные математические постановки конкретных геофизических задач в общем сводятся к определению коэффициентов соответствующих уравнений математической физики. Эта идея использована, чтобы дедуктивно свести нелинейное интегральное уравнение в постановке задачи Алексидзе к линейной комбинации искомых решений. В подобной альтернативной постановке задача сведена к классической задаче вариационного исчисления.

Any conceptual mathematical statement of the specific geophysical problems are reduced in common to the definition of the coefficients of corresponding equations of the mathematical physics. This idea was used to reduce by deduction the non-linear integral equation in the Alexidze problem statement to the linear combination of the solutions searched. In a suchlike alternative formulation this problem is converted into classic problem of variational calculus.

Обмеження математичного моделювання в геофізиці. Досі представники функціонально-аналітичного напрямку геофізики розробляють методи і алгоритми у рамках відомих інтегро-диференціальних *рівнянь математичної фізики*, які описують поведінку геофізичних полів. Їхні зусилля спрямовані на те, щоб визначити деякі коефіцієнти цих рівнянь та внести відповідні поправки за "складність" середовища. Ці коефіцієнти визначаються за допомогою ітераційних схем, які вкладаються у принципи Тихонова розв'язування обернених задач математичної фізики [4].

Одначе, визначення цих коефіцієнтів за функціями, які утворюють відповідні системи рівнянь – принципово *неоднозначне*. Це особливо очевидно при масових машинних розрахунках на системах великої розмірності [7]. А за найменших похибок у вхідних даних розв'язки – істотно нестійкі. Подолати цю нестійкість на порядок важче, ніж отримати формальні розв'язки задач. До того ж, *слід вхідних функцій*, за яким визначають їхні коефіцієнти – двовимірний, а відновити необхідно тривимірне поле, за яким знаходять коефіцієнти при третій координаті, яка не співпадає з розмірністю сліду.

Формально підійти до цієї проблеми означає отримати псевдопросторовий розподіл, який "розчиниться" серед еквівалентних розв'язків задачі. Крім того, запозичивши теоретичний апарат математичної фізики, геофізики одночасно успадкували суто *евклідову структуру* просторів функцій, яка для регіональних побудов втрачає свої якості [2]. Отже, обмеженість інтегро-диференціальних операторів, які апроксимують математичну модель середовища – це методичний зріз проблеми

Вхідні дані – це, по-суті, двовимірні *проекції* геофізичних полів на поверхню Землі, виміряні з похибками на розрідженій *нерегулярній* мережі спостережень. Вони апріорі отримані з *невідомими* похибками, тому додатково до сказаних вище методичних проблем ускладнюють поведінку (і визначення) функцій, які входять до відповідних модельних рівнянь. А розвиток комп'ютерного моделювання призвів до загального застосування дискретної шкали вхідних функцій. Зважаючи на те, що досі не освоєно пряме отримання вхідних даних для обернених задач геофізики з баз даних пунктів спостере-

жень [8], переведення неперервних вхідних даних у дискретну форму в процесі цифрової картографії неминуче вносить додаткові спотворення, окрім похибок вимірювань. Ці проблеми є наслідком методології минулого століття, що відживає своє, тому ми їх називаємо методологічними.

Новий геофізико-математичний апарат. Як вказані вище, так і інші математичні та методичні проблеми, зумовлені неадекватністю апарату математичного моделювання геофізичних даних, змусили геофізиків розробляти власний геофізико-математичний апарат. В його рамках істотно перероблені відомі математичні методи з урахуванням фактів, притаманних суто геофізичним явищам. Започаткував розробку своєрідного "геофізичного діалекту" В.М. Страхов [6] – у потенціальних полях, врахувавши ортогональність сигналу й похибки та дискретність даних; продовжив В.В. Гольдін – у сейсміці, врахувавши нелінійність акустичного середовища та сейсмічну анізотропію кори; підтримав В.В Аксьонов [1] – у електродинаміці, врахувавши сферичність джерел електромагнітного поля і механізми динамозбудження, і т.д.

Без чіткої національної програми розвитку технологій потенціальних полів та створення мережі моніторингу гравімагнітних полів ми не можемо вплинути на реформацію принципів отримання вхідних даних. Сподіваємося, що адекватна потребам як геофізиків-польовиків, так і фахівців-інтерпретаторів система неперервних спостережень для формування загальнодоступної бази даних гравімагнітних полів постане в найшлижчій перспективі. Але наразі ми можемо запропонувати деякі міркування щодо нових підходів до зображення математичних моделей геологічного середовища та геофізикних полів. Наші пропозиції вкладаються в рамки нового апроксимаційного підходу [5] до створення вказаних конструкцій.

В рамках дослідження [3] отримано нову аналітичну (диференціальну) модель поля сили тяжіння. Основні етапи її виведення ілюструє такий ланцюжок рівнянь:

$$\operatorname{divgrad}(\overline{g},\overline{n}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i^2} \equiv \frac{\partial}{\partial \overline{n}}\left[\Delta W(x)\right] + a^2(x)\cdot g(x),$$

де $g(x) = \operatorname{grad}W(x)$, $\overline{n}(x) = \dfrac{\operatorname{grad}W(x)}{\left|\operatorname{grad}W(x)\right|}$, $\Delta W(x) = -4\pi f\mu(x) + 2\omega^2$, $\mu(x)\in C^{(1)}(G)$ і

$a^2(x) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\cos(\overline{n}, x_j)\right)^2$ – міра кривизни поверхні вимірювань.

Звідси після ряду перетворень отримуємо диференціальне рівняння сили тяжіння

$$L[g(x)] = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i^2} - a^2(x)g(x) = \begin{cases} -4\pi f\left|\operatorname{grad}\mu(x)\right|, & x\in G \\ 0, & x\in V \end{cases}. \qquad (1)$$

В рамках розв'язання однорідної частини цього рівняння постала так звана задача Алексідзе для рівняння Лапласа. Нагадаємо, що для визначення модуля градієнта сили тяжіння $g(x) = \left|\operatorname{grad}W(x)\right|$ на поверхні ∂G отримано рівняння

$$g^2(x) = \frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{\partial G}\int\limits_{\partial G}\frac{\sigma(\xi)}{|x-\xi|^2}\frac{\sigma(\eta)}{|x-\eta|^2}\cos(p,q)\,dS_\xi dS_\eta \qquad (2)$$

а для визначення поверхневої густини $\sigma(\xi)$, $\xi\in\partial G$, яка входить у вираз (2), таке нелінійне рівняння:

$$g^2(x) = \frac{\sigma^2(x)}{16} + \frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{\partial G}\int\limits_{\partial G}\sigma(\xi)\cdot\sigma(\eta)\frac{\cos(p,q)}{|x-\xi|^2\cdot|x-\eta|^2}dS_\eta dS_\xi, \qquad (3)$$

де спрямовуючі косинуси компонент градієнта елегантно визначаються через суму нормованих скалярних добутків векторів нормального і аномального поля, тобто $\cos(p,q) = \sum_{i=1}^{3} \frac{(x_i - \xi_i)}{|x-\xi|} \cdot \frac{(x_i - \eta_i)}{|x-\eta|}$.

Методика розв'язування. Для отримання розв'язку рівняння (3) в [3] окреслено пару ітераційних схем, але вони мало придатні для практичних обчислень. На нашу думку, це відбувається в силу слабкої збіжності відповідного інтегралу (в смислі головного значення). А його регуляризація через зображення у вигляді відрізка ряду не гарантує бажаної точності розв'язку.

Один із можливих способів розв'язання рівняння (3) може бути таким. Зобразимо шуканий його розв'язок $\sigma(\xi),\ \xi \in \partial G$ у вигляді лінійної комбінації $\sigma(x) = \sum\sum a_{ij}\varphi_{ij}(x)$. Тоді його квадрат $\sigma^2(x) = \sum a_{ij}a_{kl}\varphi_{ij}(x)\varphi_{kl}(x)$. Тепер спробуємо формалізувати вираз (3) через введене позначення:

$$\frac{\sigma^2(x)}{16} + \frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{\partial G}\int\limits_{\partial G}\sigma(\xi)\cdot\sigma(\eta)\frac{\cos(p,q)}{|x-\xi|^2\cdot|x-\eta|^2}dS_\eta dS_\xi = \frac{1}{16}\left\{\sum_{i,j}\sum_{k,l}a_{ij}a_{kl}\varphi_{ij}(x)\varphi_{kl}(x) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i,j}\sum_{k,l}a_{ij}a_{kl}\cdot\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\partial G}\varphi_{ij}(\xi)\varphi_{kl}(\eta)\frac{\cos(p,q)}{|x-\xi|^2\cdot|x-\xi|^2}dS_\xi dS_\eta \equiv f(a_{ij}a_{kl}). \qquad (4)\right.$$

У такому зображенні задача у підсумку зводиться до *класичної* варіаційної постановки: визначити коефіцієнти a_{ij} рівняння (4) таким чином, щоб виконувалась умова мінімізації нев'язки

$$\left\|g^2(x) - f(a_{ij}a_{kl})\right\| = \min_x \qquad (5)$$

Відтепер, залежно від того, яку з популярних у теорії обернених задач метричних норм ми оберемо, задача знаходження аналітичної апроксимації (4)-(5) розв'язується у тому чи іншому просторі за допомогою класичних варіаційних методів, зокрема, модифікацій методу Ньютона.

1. *Аксенов В.В.* Геофизическая электродинамика и ее приложения // Геофиз. журн. – 2005. – **27**, № 3.
2. *Дубовенко Ю.І.* Деякі проблеми обчислення трансформацій гравітаційного поля // Вісник Київ. ун-ту. Геологія. – Вип. 48. – 2010.
3. *Дубовенко Ю.І.* Відновлення потенціалу сили тяжіння за значеннями модуля його градієнта в задачі Алексідзе // Вісник Київ. ун-ту. Геологія. – Вип. 55. – 2011.
4. *Лаврентьев М.М. и др.* Применение регуляризации в гравимагниторазведке при поисках месторождений углеводородов. – Москва, 2010.
5. *Страхов В.Н.* Линейные аналитические аппроксимации рельефа поверхности Земли // Геофизика и математика. – Москва, 1999.
6. *Страхов В.Н.* Смена парадигмы в теории линейных некорректных задач. – Москва, 2001.
7. *Страхов В.Н.* Об эффективных по быстродействию и точности методах построения линейных аналитических аппроксимаций в геофизике, геоинформатике и гравиметрии // Геофиз. журн. – 2007. – **29**, № 1.
8. *Якимчик А. И.* Технология оцифровки карт фактического материала на основе программного обеспечения MapInfo Professional и CorelDRAW // Геофиз. журн. – 2010. – **32**, № 3.

***Dubovenko Yu.*, A CALCULATION OF THE GRAVITY FIELD ANALYTICAL APPROXIMATION IN THE ALEXIDZE PROBLEM**